

# UMA ABORDAGEM UNIFICADA PARA GERAÇÃO DE GRAFOS DE CLASSES DE ESTADOS EM REDES DE PETRI TEMPORAIS

EVANGIVALDO A. LIMA\*, RICARDO LÜDERS†, LUIS ALLAN KÜNZLE‡

\**Departamento de Ciências Exatas e da Terra  
Universidade do Estado da Bahia  
Salvador, Bahia, Brasil*

†*Departamento de Informática  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Curitiba, Paraná, Brasil*

‡*Departamento de Informática  
Universidade Federal do Paraná  
Curitiba, Paraná, Brasil*

Emails: [evanlima@uneb.br](mailto:evanlima@uneb.br), [luders@dainf.cefetpr.br](mailto:luders@dainf.cefetpr.br), [kunzle@inf.ufpr.br](mailto:kunzle@inf.ufpr.br)

**Abstract**— Time constraints have been introduced in Petri nets to properly specify timed systems. This paper has interest in Merlin’s model, called time Petri net, which associates time intervals to transitions and it assumes strong timing. These nets have been successfully used in a wide range of real-time systems. This paper proposes an approach for global and relative behavior analysis. By using the state class concept to evolution of net and interval algebra elements an alternative for construction of the state graph with relative and absolute times is proposed. Furthermore, this approach is illustrated by an application.

**KEYWORDS:** Time Petri nets, time analysis, interval analysis, timed systems

**Resumo**— Restrições temporais foram incorporadas às redes de Petri para especificar sistemas temporizados. Neste artigo estamos interessados em um modelo específico de rede de Petri com tempo são as chamadas redes de Petri Temporais. As redes de Petri temporais associam a cada transição um intervalo de tempo de disparo. Essas redes são largamente usadas na modelagem de sistemas em tempo real e a análise dessas redes é feita por meio de métodos enumerativos que explicitam todas as possibilidades temporais de ocorrências de modo relativo ou global. Estes métodos, porém, apresentam problemas como aumento da imprecisão dos intervalos de disparos e explosão do número de classes para geração de grafos de classes de estados. Neste trabalho é apresentado uma abordagem unificada para geração de grafos de classes de estados que superam tais limitações. Usando recursos da álgebra intervalar clássica e da álgebra intervalar completa podem-se gerar grafos de classes que preservam as vantagens e supera as limitações dos métodos enumerativos de tempo relativo e global.

**PALAVRAS-CHAVE:** Redes de Petri temporais, análise temporal, análise intervalar, sistemas temporizados

## 1 Introdução

As redes de Petri temporais (*RPTs*) são uma extensão das redes de Petri e são capazes de modelar sistemas temporizados nos quais a execução de tarefas é caracterizada pelo instante de início e pelo tempo máximo da execução (Aura and Lilius, 1996).

Os principais métodos para análise de uma *RPT* usam a geração do completo espaço de estados da rede. Um importante método para análise é o denominado método enumerativo baseado em *classe de estados*. Nessa abordagem, um relógio local é associado a cada transição de modo a totalizar o tempo relativo à habilitação da transição. Após o disparo da transição o relógio será desativado e voltando a ser ativado com uma nova habilitação da transição (Berthomieu and Diaz, 1991). Outra abordagem, também usando o conceito de classe de estados, trata o tempo de forma global, ou seja, fixa uma referência e todos os tempos de habilitação são contados relativos a essa referência (Wang and Deng, 2000;

Lima, 2007). Em ambas as abordagens, o espaço de estados é explicitado pelo chamado *grafo de classes de estados*.

A análise de uma *RPT* usando uma das abordagens apresenta limitações: Para redes com alta grau de concorrência, o uso do tempo relativo aumenta consideravelmente a imprecisão. Esse aumento da imprecisão se deve ao fato do tempo relativo perder informação do momento de habilitação das transições persistentes<sup>1</sup>. Outro importante fator que causa o aumento da imprecisão é a operação de subtração entre intervalos, nela há um aumento da imprecisão, pois o intervalo resultante da operação é alargado. Já as classes de estados usando tempo global têm limitações com transições recém-habilitadas. O uso desse método pode levar a falsos resultados e o grafo de classes pode ter um número ilimitado de

---

<sup>1</sup>Transições persistentes são transições que, uma vez habilitadas, só seu próprio disparo pode desabilitá-la. Porém, há diferentes graus de persistência, quando a transição pode ser desabilitada pelo disparo de outra ela é chamada de herdada.

classes, mesmo para redes limitadas (Lima, 2007).

Neste artigo é apresentada uma abordagem unificada para geração de grafos de classes em *RPTs* que, supera as limitações da análise usando tempo relativo e possibilita obter-se o tempo global, no cálculo dos intervalos de disparos das transições. Além disso, caso a rede seja limitada, a abordagem é capaz de gerar um grafo de classes de estados também limitado. Utilizando recursos da álgebra intervalar clássica e da álgebra intervalar completa obtém-se um grafo de classes que contém as informações temporais relativas a cada classe e possibilita o cálculo direto do tempo global de execução da rede. Em (Lima, 2007) é apresentado o conceito de classes equivalentes que também gerar grafos de classes limitados, porém, usando o tempo global apenas.

Este artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, é apresentada uma breve revisão das redes de Petri temporais. Na Seção 3, é feita uma análise dos dois principais métodos para construção de grafos de classes. Uma revisão dos conceitos básicos de álgebra intervalar é feita, de modo breve, na Seção 4. Na Seção 5, é apresentado a abordagem unificada para geração de grafos de classes de estados. Na Seção 6, uma aplicação ilustrando a proposta é apresentada. Por fim, as conclusões são apresentadas na Seção 7.

## 2 Redes de Petri Temporais

As *RPTs* são uma das mais eficientes ferramentas para modelagem de sistemas concorrentes com restrição de tempo associada à ocorrência de cada evento. Nas *RPTs*, cada ocorrência de evento acontece dentro de um intervalo de tempo. Os limites inferior e superior desse intervalo de tempo determinam o mínimo e o máximo instante para a ocorrência do evento. Com isso, torna-se possível modelar restrições de tempo onde o instante exato da ocorrência é desconhecido. Em sistemas reais esta situação é bastante comum pois, na prática, se especifica limites de tempo quando se desconhece seu valor exato. Ao intervalo, delimitando o valor da ocorrência de cada evento será denominado de domínio de tempo dessa ocorrência.

**Definição 2.1 (Domínio de Tempo)** - Seja  $(\mathbb{I}\mathbb{Q}^+)^n$  o conjunto dos intervalos racionais e denota-se por  $\mathbf{I} = i_1 \times i_2 \times \dots \times i_n$  ao vetor intervalar, cujos elementos são intervalos fechados, tal que

$$i_k = [a, b] = \{i \in \mathbb{Q} \mid a \leq i \leq b\}$$

O domínio de tempo é um vetor cujas coordenadas são intervalos de tempo. O domínio varia seus elementos conforme o estado em que a rede se encontra. Um intervalo  $i_k$  pode ter

comprimento zero, ou seja,  $a = b$ , e é chamado de intervalo degenerado. Quando o intervalo for nulo, significando um evento desabilitado, será representado pelo elemento 0. Assim, diferencia-se o intervalo degenerado, cujos elementos têm valores iguais a 0, do intervalo nulo, ou seja,  $[0, 0] \neq 0$ .

**Definição 2.2 (Rede de Petri Temporal)** - Formalmente, uma rede de Petri temporal é uma sextupla  $RPT = (P, T, Pre, Post, FI, M_0)$  sendo,  $P$ , o conjunto de lugares;  $T$ , o conjunto de eventos (ou transições);  $P \cap T = \emptyset$ ;  $Pre : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ , valor dos arcos;  $Pos : T \times P \rightarrow \mathbb{N}$ , valor dos arcos;  $FI : T \rightarrow \mathbf{I}^s$ , uma função intervalo estático;  $M_0 \subseteq P$ , a marcação inicial da *RPT*.

A função  $FI$  associa a cada transição  $t_i$  da rede, um intervalo de tempo  $\mathbf{I}^s(t_i) = [\delta^s, \Delta^s]$ , denominado intervalo de tempo estático da transição. Os limites  $\delta^s$  e  $\Delta^s$  são chamados *limite inferior de ocorrência (LIO)* e *limite superior de ocorrência (LSO)*, respectivamente.

A partir dos trabalhos apresentados em (Berthomieu and Menasche, 1982; Berthomieu and Diaz, 1991) é comum encontrar os limites dos intervalos de tempo como sendo números racionais. Os reais não são permitidos por tornar o espaço de estados intratável, mesmo para *RPTs* limitadas. Na realidade, em problemas práticos os valores reais não são necessários.

**Definição 2.3 (Habilitação de uma Transição)** - Uma transição  $t \in T$  em uma *RPT* é dita *habilitada* pela marcação  $M$  se, e somente se,  $M \geq Pre(t)$

sendo,  $M$  o vetor marcação e  $Pre(t)$  o vetor coluna da matriz incidência de entrada da rede (Murata, 1989). O conjunto formado por todas as transições habilitadas em  $M$  será denotado por  $\mathcal{H}$ .

Nas *RPTs*, o fato de uma transição  $t$  estar habilitada pela marcação, não necessariamente significa que ela irá disparar. Primeiro, é preciso que ela permaneça continuamente habilitada por um tempo mínimo e igual ao *LIO*, quando então, poderá ser disparada. Caso a transição permaneça habilitada até o instante *LSO*, então, ela deverá ser disparada. Para uma descrição do estado de uma *RPT*, portanto, é necessário a marcação atual da rede e uma informação a respeito do tempo de habilitação das transições.

**Definição 2.4 (Estado)** - O estado de um *RPT* é caracterizado pelo par  $s = (M, I)$  sendo,  $M$  o vetor marcação da rede e  $I$  o vetor tempo de habilitação das transições habilitadas no estado.

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbf{I} \\ t &\longmapsto \mathbf{i}(t) \end{aligned}$$

a informação temporal de cada transição habilitada,  $t \in \mathcal{H}$ , tem um domínio intervalar, ou seja,  $\mathbf{i}(t) \in \mathbf{I}$ . O estado inicial das *RPTs* é  $s_0 = (\mathbf{M}_0, \mathbf{I}_0)$ , sendo  $\mathbf{I}_0 \in \mathbf{I}^s$  o vetor racional contendo os instantes em que as transições passaram a ser habilitadas pela marcação  $\mathbf{M}_0$ .

A mudança de estado em uma *RPT* pode ocorrer devido ao tempo, sem disparo de transição ou devido ao disparo de transição, sem variação do tempo. Dessa forma, múltiplas possibilidades de estados podem ser explicitadas. Geralmente, a mudança do estado com o tempo é aplicada em verificação formal de modelos, seja combinado com lógica temporal (Yoneda and Schlingloff, 1997), com processo temporal e *unfolding* (Aura and Lilius, 1996) ou utilizando a matriz de intervalos *DBM* (*Difference Bound Matrix*) (Vicario, 2001). Na mudança de estado devido

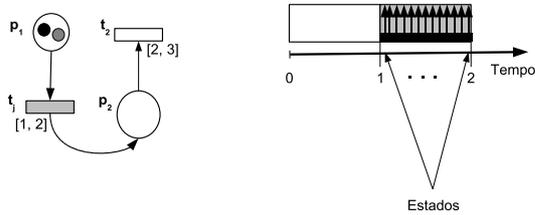


Figura 1: *RPT* e classe de estados

ao disparo de uma transição, a marcação e os tempos das transições habilitadas no novo estado são atualizados. Porém, a natureza contínua do tempo produz inúmeras possibilidades de estados dentro do domínio de disparo, tornando o modelo, sob o ponto de vista computacional, intratável. Nesse sentido, o conceito de *Classe de Estados*, introduzido em (Berthomieu and Menasche, 1982) e ampliado em (Berthomieu and Diaz, 1991), contribuiu decisivamente para o desenvolvimento de técnicas para análise das *RPTs*.

**Definição 2.5 (Classe de Estados)** - Uma classe de estados em uma *RPT* é definida pelo par  $S = \langle \mathbf{M}, \mathbf{I} \rangle$ , sendo

- $\mathbf{M}$ , a marcação da rede
- $\mathbf{I}$ , o vetor cujos elementos são os intervalos de disparos das transições habilitadas por  $\mathbf{M}$ , também chamado domínio dinâmico. Para a classe inicial  $\mathbf{I}_0 \subseteq \mathbf{I}^s$

Na Figura 1a é mostrada uma *RPT* com duas transições cujos tempos de disparos pertencem aos intervalos  $[1, 2]$  e  $[2, 3]$ , respectivamente. Os tempos de disparos são contados a partir do instante em que a transição é habilitada pela marcação. Considerando que a transição  $t_1$  ficou

habilitada no instante 0, o estado inicial da rede seria  $s_0 = \langle \mathbf{M}_0, 0 \rangle$ , sendo  $\mathbf{M}_0 = [2 \ 0]^T$ . Considerando a mudança de estado com o disparo de uma transição apenas, a mudança da marcação inicial só poderia ocorrer a partir do instante 1, que representa o *LIO*. Já no instante 2, caso a transição  $t_1$  mantenha-se habilitada, ela deverá ser disparada, já que esse instante corresponde ao *LSO* da transição  $t_1$ . Há, portanto, um número elevado de estados, desde o instante 1 até o instante 2, conforme Figura 1b. Na definição de classe de estados, entretanto, considera-se apenas o intervalo de tempo no qual há possibilidade de disparo de transições. Portanto, para a rede mostrada na Figura 1, a classe inicial seria  $S = \langle \mathbf{M}_0, \mathbf{I}_0 \rangle$ , sendo  $\mathbf{I}_0 = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ 0 \end{pmatrix}$ . O intervalo  $[1, 2]$  representa o domínio de disparo da transição  $t_1$ .

### 3 Dinâmica das *RPTs*: Tempo Relativo $\times$ Tempo Absoluto

Com o disparo de uma transição, há a necessidade de atualização dos domínios de tempo da nova classe de estados da rede. Existem duas abordagens diferentes quanto ao tratamento do tempo de atualização das classes de estados: uma que trata o tempo de forma relativa ao instante em que a transição foi habilitada (Berthomieu and Diaz, 1991), outra que trata o tempo de forma global, ou seja, os domínios são relativos ao início de execução da rede (Wang and Deng, 2000; Lima, 2007). Seja uma ou outra semântica, a dinâmica das *RPTs* consiste em explicitar, através de um grafo de classes, todas as classes de estados alcançáveis a partir da inicial. Ambas as semânticas apresentam vantagens e desvantagens tanto do ponto de vista do aumento da imprecisão nos resultados quanto na construção do grafo de classes da rede. Enquanto a semântica de tempo relativo apresenta um grafo limitado para uma *RPT* também limitada, a semântica de tempo global, devido a natureza contínua do tempo, pode gerar um grafo de classes ilimitado. Por outro lado, a análise global não aumenta a imprecisão dos intervalos de ocorrência nas classes. Para explorar as vantagens de cada das abordagens, este artigo fará uso dos conceitos da álgebra intervalar clássica e da álgebra intervalar completa para propor uma abordagem unificada para geração de grafos de classes estados.

Para a rede mostrada na Figura 1a, têm-se os grafos de classes mostrados na Figura 2. Na análise usando tempo relativo, Fig. 2a, o grafo de classes é limitado, porém, a seqüência de disparos  $t_1 t_2 t_1 t_2$  tem os seguintes intervalos de disparos relativos  $[1, 2], [2, 2], [0, 0], [2, 3]$ , o que corresponde a um intervalo global igual  $[5, 7]$ . Entretanto, usando a análise de tempo global, esta mesma seqüência tem como intervalo global

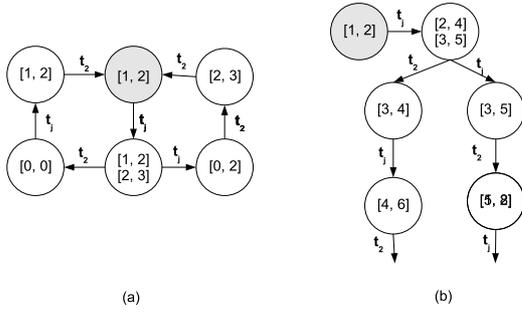


Figura 2: Grafos de classes para o tempo relativo Figura (a) e tempo global (b)

[4, 6]. Observa-se, portanto, um alargamento do intervalo resultante quando se usa a análise com tempo relativo. Porém, o grafo de classes na análise global, Fig. 2b, tem um número indefinido de classes, mesmo a rede sendo limitada. Isto se deve à natureza contínua do tempo. Outra limitação da abordagem global está no fato dela não carregar informação a respeito dos intervalos relativos das transições nas classes. Para superar as limitações das duas abordagens e preservar suas vantagens, utilizaremos alguns elementos da álgebra intervalar clássica e da álgebra intervalar completa.

#### 4 Elementos da Álgebra Intervalar Clássica e da Completa

Neste seção serão definidos alguns conceitos e operações básicas sobre conjunto dos intervalos clássicos e uma extensão para a álgebra intervalar completa, também conhecida como álgebra modal (Shary, 1996)

Um **intervalo clássico** é definido como sendo o conjunto  $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$  sendo,  $\underline{x}$  e  $\bar{x}$  denominados limites inferior e superior do intervalo  $\mathbf{x}$ , respectivamente.

A interseção de dois intervalos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  é definida como segue, Se  $\mathbf{x} \cap \mathbf{y} \neq \emptyset$ , então,  $\mathbf{x} \cap \mathbf{y} = [\max\{\underline{x}, \underline{y}\}, \min\{\bar{x}, \bar{y}\}]$ .

##### Relação de Ordem

Há na literatura vários tipos de relações de ordem definidas sobre o conjunto dos intervalos,  $\mathbb{IR}$  (Jaulin et al., 1995).

**Menor ou igual**

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \iff \underline{x} \leq \underline{y}, \bar{x} \leq \bar{y}$$

**Inclusão**

$$\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \iff \underline{x} \geq \underline{y}, \bar{x} \leq \bar{y}$$

**Operações básicas:**

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}] \\ \mathbf{x} - \mathbf{y} &= [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}] \end{aligned}$$

Na álgebra intervalar completa cada elemento do conjunto dos intervalos  $\mathbb{IK}^2$  é definido por

<sup>2</sup>a álgebra completa também é chamada de álgebra de Koucher

$[\underline{x}, \bar{x}]$  e são pares de números reais não sujeitos à condição  $\underline{x} > \bar{x}$ . Assim,  $\mathbb{IK}$  é obtido pela junção dos chamados intervalos impróprios  $[\underline{x}, \bar{x}]$ ,  $\underline{x} > \bar{x}$ , ao conjunto  $\mathbb{IR} = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$ , dos intervalos próprios e números reais.

Todo elemento  $\mathbf{x} \in \mathbb{IK}$  tem um único oposto algébrico denotado por *opost*  $\mathbf{x}$ , e

$$\text{opost } \mathbf{x} + \mathbf{x} = 0 \implies \text{opost } \mathbf{x} = [-\underline{x}, -\bar{x}]$$

A operação inversa da adição é a operação diferença da álgebra intervalar completa e denotada por  $\ominus$ , tal que

$$\mathbf{x} \ominus \mathbf{y} = [\underline{x} - \underline{y}, \bar{x} - \bar{y}]$$

Como neste artigo essa operação envolve a grandeza tempo ela passa a ser definida por

$$\mathbf{x} \ominus \mathbf{y} = [\max\{0, \underline{x} - \underline{y}\}, \max\{0, \bar{x} - \bar{y}\}]$$

Muitas são as vantagens da álgebra intervalar completa em relação à álgebra intervalar, como por exemplo, a comutatividade completa para a adição (Shary, 1996)

#### 5 Construção do Grafo de Classes de uma RPT com Domínio de Classe Relativo e Intervalo de Disparo Global

Nesta seção é apresentada uma abordagem para geração do grafo de classes de uma RPT com o domínio dinâmico de cada transição adotando o tempo relativo à sua entrada e possibilita o cálculo do tempo global para qualquer seqüência da rede.

Usando conceitos da álgebra intervalar completa (Shary, 1996) e aplicando as definições da análise com tempo global, algumas regras para tratar o domínio das transições são apresentadas, como segue,

1. Na classe inicial os intervalos dinâmicos são os próprios intervalos estáticos das transições habilitadas, ou seja,

$$S_0 = \langle \mathbf{M}_0, \mathbf{I}_0 \rangle$$

sendo,  $\mathbf{M}_0$  o vetor marcação inicial e  $\mathbf{I}_0$  o vetor intervalos de disparos e  $\mathbf{I}_0 \subseteq \mathbf{I}^s$ .

Disparando uma transição  $t_0$  seu intervalo de disparo será,

$$i_0^d = [\delta_0(t_0), \min\{\Delta_0(t)\}]$$

sendo,  $\Delta_0(t) = \Delta^s(t)$  com  $t, t_0 \in \mathcal{H}_0$ .

2. Para a classe  $S_1 = \langle \mathbf{M}_1, \mathbf{I}_1 \rangle$ , alcançada a partir da classe  $S_0$ , devido ao disparo de uma transição  $t_0$ , têm-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= \mathbf{M}_0 + \text{Pos}(t_0) - \text{Pre}(t_0) \\ \mathbf{I}_1(t) &= \begin{cases} \mathbf{I}^s(t), & t \in \mathcal{N}_1 \\ \mathbf{I}_0(t) - i_0^d(t), & t \in \mathcal{P}_1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mathbf{I}_1^r(t) = \mathbf{I}_0^r(t) \ominus i_0^d(t), t \in \mathcal{P}_1$$

sendo,  $\mathcal{N}_1$  o conjunto das transições recém-habilitadas em  $S_1$  e  $\mathcal{P}_1$  o conjunto das transições persistentes em  $S_1$ .

A partir da classe  $S_1$  cada transição persistente terá dois intervalos de disparos:  $\mathbf{I}_1(t)$ , intervalo relativo considerando a operação clássica da diferença e  $\mathbf{I}_1^r(t)$ , o intervalo relativo completo, considerando a operação diferença da álgebra intervalar completa, o qual será utilizado para calcular o tempo global. Para transições recém-habilitadas tais intervalos são iguais.

Disparando uma transição  $t_l \in \mathcal{H}_1$ , seu intervalo de disparo com tempo global será,

$$i_1^d(t_l) = i_0^d(t_0) + i_1^{dr}(t_l)$$

sendo,  $i_1^{dr}(t_l) = \mathbf{I}_1^r(t_l)$

- Para  $j = 1, 2, \dots$  cada classe  $S_{j+1} = \langle M_{j+1}, \mathbf{I}_{j+1} \rangle$ , alcançada a partir da classe  $S_j = \langle M_j, \mathbf{I}_j \rangle$ , devido ao disparo de uma transição  $t_l$ . têm-se que

$$M_{j+1} = M_j + \text{Pos}(t_l) - \text{Pre}(t_l)$$

$$\mathbf{I}_{j+1}(t) = \begin{cases} \mathbf{I}^s(t), & t \in \mathcal{N}_{j+1} \\ \mathbf{I}_j(t) - i_j^{dr}(t_l), & t \in \mathcal{P}_{j+1} \end{cases}$$

$$\mathbf{I}_{j+1}^r(t) = \mathbf{I}_j^r(t) \ominus i_j^{dr}(t_l), t \in \mathcal{P}_{j+1}$$

Disparando uma transição  $t_m$  seu intervalo de disparo será,

$$i_{j+1}^d(t_m) = i_j^d + i_{j+1}^{dr}(t_m)$$

Na Figura 3 é mostrada as classes  $S_j$  e  $S_{j+1}$  com seus intervalos relativos e globais. Os intervalos de disparos, considerando o tempo global, serão obtidos pelo acúmulo dos intervalos de disparos considerando a operação diferença da álgebra intervalar completa.

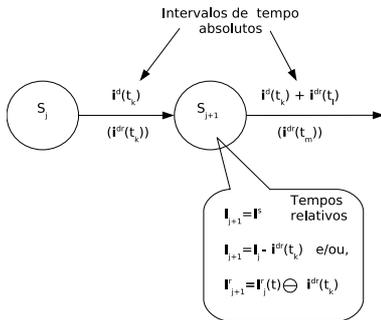


Figura 3: Classe de estados com domínio relativo

## 6 Aplicação

Para a rede mostrada na Figura 4, uma parte do correspondente grafo de classes considerando o tempo global, é mostrado na Figura 5.

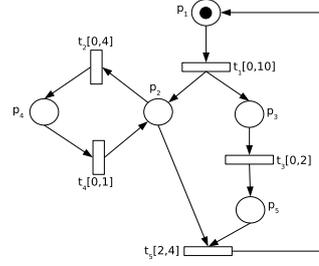


Figura 4: RPT para Aplicação

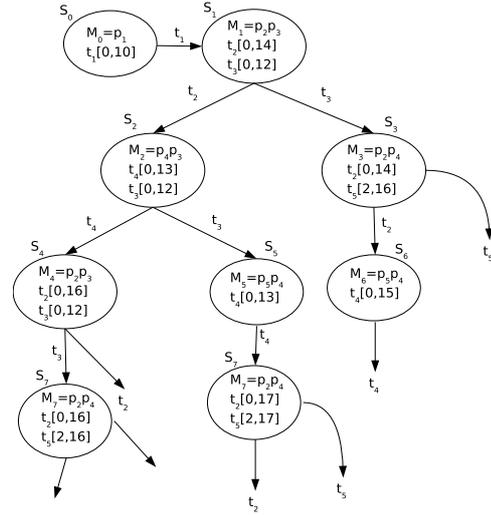


Figura 5: Parte do grafo de classes com tempo global para a rede da Fig. 4

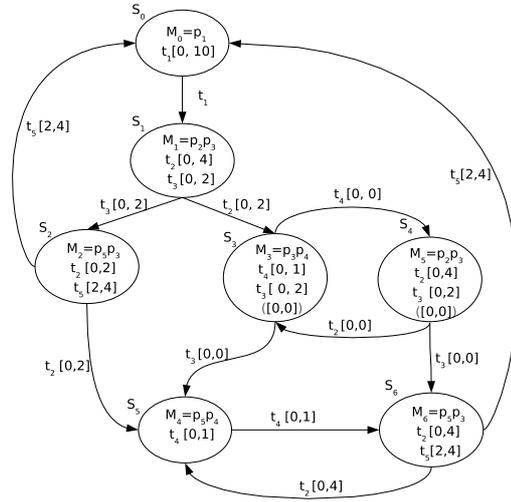


Figura 6: Grafo de classes usando domínio relativo para a rede mostrada na Fig. 4

Aplicando a abordagem unificada obtêm-se o grafo de classes de estados mostrado na Fig. 6. Para a seqüência  $\sigma_1 = t_1 t_2 t_4 t_3 t_5$ , por exemplo, obtêm-se os seguintes tempos relativos em cada classe,

$$1. S_0 = \begin{cases} \mathbf{I}_0(t_1) = [0, 10] \\ \mathbf{i}^{dr}(t_1) = [0, 10] \end{cases}$$

O tempo global para o disparo de  $t_1$  é  $\mathbf{i}^d(t_1) = [0, 10]$ .

$$2. S_1 = \begin{cases} \mathbf{I}_1(t_2) = [0, 4] \\ \mathbf{I}_1(t_3) = [0, 2] \\ \mathbf{i}^{dr}(t_2) = \mathbf{i}^{dr}(t_3) = [0, 2] \end{cases}$$

Disparando  $t_2$ , tem-se  $\mathbf{i}^d(t_2) = \mathbf{i}^d(t_1) + \mathbf{i}^{dr}(t_2) = [0, 10] + [0, 2] = [0, 12]$ .

$$3. S_3 = \begin{cases} \mathbf{I}_3(t_3) = [0, 2] \\ \mathbf{I}_3(t_4) = [0, 1] \\ \mathbf{i}^{dr}(t_3) = [0, 2] \ominus [0, 2] = [0, 0] \\ \mathbf{i}^{dr}(t_4) = [0, 1] \end{cases}$$

Disparando  $t_4$ , seu intervalo relativo na classe é  $\mathbf{i}^{dr}(t_4) = [0, 1]$ , porém para atualizar o intervalo global ele é comparado ao intervalo relativo completo de  $t_3$ , logo o intervalo de tempo global será igual a  $[0, 12]$ .

$$4. S_4 = \begin{cases} \mathbf{I}_4(t_2) = [0, 4] \\ \mathbf{I}_4(t_3) = [0, 0] \\ \mathbf{i}^{dr}(t_2) = \mathbf{i}^{dr}(t_3) = [0, 0] \end{cases}$$

Disparando  $t_3$ , seu intervalo global será  $[0, 13]$ .

$$5. S_6 = \begin{cases} \mathbf{I}_6(t_2) = [0, 4] \\ \mathbf{I}_5(t_5) = [2, 4] \\ \mathbf{i}^{dr}(t_2) = [0, 4] \\ \mathbf{i}^{dr}(t_5) = [2, 4] \end{cases}$$

O disparo de  $t_5$ , portanto, será no intervalo de tempo global igual a  $[0, 10] + [0, 2] + [0, 0] + [0, 0] + [2, 4] = [2, 16]$

Além de obter o tempo global para o disparo da seqüência, também são obtidos os tempos relativos de cada transição da seqüência. Neste exemplo, para manter essa seqüência dentro do intervalo  $[2, 16]$ , só podem variar os tempos de disparo de  $t_1, t_2$  e  $t_5$  cujos intervalos relativos de disparos são  $[0, 10]$ ,  $[0, 2]$  e  $[2, 4]$ , respectivamente. Porém, tão importante quanto as informações relativas e globais do tempo é a obtenção de um grafo de classe limitado mesmo com análise de tempo global. Conforme mostrado na Figura 5, o grafo de classes usando a análise de tempo global seria ilimitado. Já a análise usando a abordagem do tempo relativo levaria a um intervalo global igual  $[2, 19]$ , aumentando a imprecisão do resultado.

## 7 Conclusões

Usando elementos da álgebra intervalar clássica e completa, este artigo apresentou uma abordagem unificada para gerar grafos de classes de estados em *RPTs*. Esta abordagem supera as limitações dos grafos obtidos através das análises usando tempo global ou relativo. Ao tratar o domínio

de disparos usando o tempo relativo e a mudança de classes com tempo global, obtêm-se ao mesmo tempo informação tanto do tempo global de execução das transições quanto o tempo de relativo de habilitação de cada uma delas. Portanto, tal abordagem possibilita facilidades em planejamento de escalonamento de tarefas, obtenção de tempos parcial e global para execução de tarefas e, principalmente, a geração de grafos de classes de estados limitados que preserva informações relativa e global do tempo.

## REFERÊNCIAS

- Aura, T. and Lilius, J. (1996). Time processes for time Petri nets, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 1248, Springer Verlag, Berlin, Germany, pp. 136–155.
- Berthomieu, B. and Diaz, M. (1991). Modeling and verification of time dependent systems using Petri nets, *IEEE Transactions on Software Engineering*, Vol. 17, pp. 259–273.
- Berthomieu, B. and Menasche, M. (1982). A state enumeration approach for analyzing time Petri nets, *3rd European Workshop on Applications and Theory of Petri Nets*, Varenna, Italy.
- Jaulin, L., Kieffer, M., Didrit, O. and Walter, E. (1995). *Methods and Applications of Interval Analysis*, SIAM - Studies in Applied Mathematics.
- Lima, E. A. (2007). *Análise e Aplicações em Redes de Petri Temporais: Uma Abordagem via Álgebra Intervalar*, PhD thesis, CPGEI - Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
- Murata, T. (1989). Petri nets: Properties, analysis and applications, Vol. 77, Proceedings of IEEE, pp. 541–580.
- Shary, S. P. (1996). A new approach to the analysis of static systems under interval uncertainty, *Scientific Computing and Validated Numerics* pp. 118–132.
- Vicario, E. (2001). Static analysis and dynamic steering of time-dependent systems, *IEEE Transactions on Software Engineering* **27**(8): 728–748.
- Wang, J. and Deng, Y. (2000). Reachability analysis of real-time systems using time Petri nets, Vol. 30, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B*, pp. 725 – 736.
- Yoneda, T. and Schlingloff, B.-H. (1997). Efficient verification of parallel real-time systems, Vol. 11, *Formal Methods in System Design*, pp. 187–215.